DUILIO GIGLI

RIFLESSIONI SUI PRINCIPII DELL'ARITMETICA

Estratto dall' " Annuario del R. Liceo-Ginnasio U. Foscolo di Pavia "
Volume III (1925-26)

PAVIA
TIPOGRAFIA COOPERATIVA
1927

RIFLESSIONI SUI PRINCIPII DELL'ARITMETICA

Sono stati molto coltivati, specialmente dal 1850 a questa parte, gli studi critici intorno ai principii dell'Aritmetica; e ad essi hanno portato i loro contributi molti fra i matematici più eminenti, in Italia e fuori. Su tali studi mi son trovato a dover riflettere a lungo, così per i bisogni dell'insegnamento, come, e principalmente, per la compilazione d'un articolo sulla *Aritmetica generale*, che sarà presto pubblicato col 1° volume dell'*Enciclopedia delle Matematiche elementari.* E mi pare di poter qui esporre alcune delle idee che mi hanno guidato in questo lavoro [1].

* * *

Io ritengo che uno dei compiti dell'Aritmetica debba esser sempre quello di dare una descrizione del processo per il quale contiamo e misuriamo, d'un processo dunque al quale si applica ogni mente, non da sola e per com-

[1] V. anche le mie *Lezioni di Aritmetica e di Algebra elementare*, edit. Zanichelli, Bologna.

pierlo *ex novo*, ma sorretta dall'eredità e, mediante l'insegnamento, dalla tradizione.

La descrizione ch'io porgo di quel processo è questa.

Partiamo dalla considerazione delle *collezioni d'oggetti* — modelli delle *classi finite* —, dalle operazioni di analisi d'una collezione in *parti* e di sintesi di collezioni in una collezione *risultante*, e dalle esperienze di *ordinamento* degli elementi d'una collezione e di *riferimento* degli elementi d'una collezione a quelli d'un'altra: operazioni ed esperienze che ci dànno le nozioni di *equivalenza*, di *prevalenza* o *suvvalenza* d'una collezione rispetto ad un'altra.

Queste operazioni ed esperienze possono essere semplicemente pensate; e perciò ci induciamo ad affermare che, data una qualsiasi collezione A, si hanno ancora oggetti oltre quelli di A: se occorre, gli stessi oggetti di A pensati in altro modo, ai quali cioè si pensino comunque apposti dei contrassegni.

Ora, quando, nella considerazione d'una collezione d'oggetti, noi facciamo astrazione dalla specie dei suoi elementi (dai loro caratteri fisici), dal loro collocamento e dal tempo nel quale son dati, noi intendiamo che resta inerente alla collezione un carattere, e questo diciamo il *numero cardinale, concreto, degli elementi della collezione*. (Vedi N. Tartaglia [2]: «.... il Mathematico considera il detto numero si come una moltitudine composta de *unitade Mathematice*, cioè *astratte da ogni materia sensibile, secondo la ragione* ....»; vedi R. Lipschitz [3]: « Wenn man, bei der Betrachtung getrennter Dinge, von den Merkmalen absieht, durch welche sich die Dinge

---

[2] *General trattato di numeri et misure*, Venezia, 1556.

[3] *Lehrbuch der Analysis*, Bonn, 1877-80.

unterscheiden, *so bleibt der Begriff der Anzahl der betrachteten Dinge zurück* »; e vedi G. CANTOR [4]: « *Mächtigkeit* oder *Cardinalzahl* von M nennen wir den Allgemeinenbegriff, welcher, mit Hülfe unseres activen Denkvermögens, dadurch aus der Menge M hervorgeht, dass *von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahirt wird* »).

Si trattano come collezioni anche i singoli oggetti; e i numeri inerenti a questi si dicono le *unità*. (Vedi EUCLIDE [5]: « μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται » [6]; e vedi G. W. LEIBNIZ [7]: « Abstractum autem ab uno est *Unitas* .... ».)

Affermato il concetto di numero, come si è fatto, stabilito che si chiamino *eguali* i numeri inerenti a collezioni equivalenti, *diseguali* quelli inerenti a collezioni non equivalenti, e che si dica *somma* di *a* e *b* il

---

[4] *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre I*, Math. Ann. 46 (1895).

[5] *Elementi*, VII, I.

[6] Osservò G. PEANO (*Formole di Logica matematica*, Riv. di Mat. I, 1891): " .... il circolo vizioso fra le parole μονάς e ἕν, meno evidente in greco, diventa chiaro fra le parole *uno* e *unità* nelle altre lingue .... ". E togliamo da B. CROCE (*Logica come scienza del concetto puro*, edit. Laterza, Bari, 1909 (2ª ed.); p. 81): " Sembrerebbe, tuttavia, che la definizione, sebbene affermi l'essenza e l'esistenza insieme, e, quindi, la realtà del concetto, sia forma vuota, per la constatazione già fatta che, in ogni definizione, il soggetto e il predicato sono il medesimo, e che, quindi, essa è giudizio tautologico. Certamente, la definizione è tautologica, ma di una tautologia sublime, affatto diversa dalla vacuità che si suole condannare con quella parola. La tautologia della definizione significa che il concetto è pari soltanto a sè stesso, e non può essere risoluto in altro o spiegato da altro. Nella definizione, la verità *praesentia patet;* e, se la Dea non si rivela colla semplice presenza, invano il sacerdote tenterà di scoprirla al volgo, paragonandola con ciò che è a lei inferiore, con le cose sensibili, che sono manifestazioni particolari di lei.

[7] *Dissertatio de arte combinatoria*, Lipsia, 1666.

numero inerente alla collezione risultante di quelle cui sono inerenti i numeri a e b, tradurremo le proprietà essenziali, fra quelle prima osservate intorno alle collezioni, in proposizioni relative a numeri. E in queste saranno sostituibili numeri eguali, come nelle ricordate operazioni ed esperienze intorno alle collezioni erano sostituibili le collezioni equivalenti.

Il che ci induce a ripartire le collezioni in classi di collezioni equivalenti e quindi a concepire il *numero cardinale, astratto,* come la nota che resta inerente ad una classe di collezioni equivalenti, quando ancora si faccia astrazione dalla specie degli elementi delle collezioni della classe, dal loro posto e dal tempo nel quale son dati. (Vedi R. DESCARTES [8]; « Ita etiam cum numerus non in ullis rebus creatis, sed tantum in abstracto, sive in genere consideratur, est modus cogitandi duntaxat: ut et alia omnia quae universalia vocamus. *Fiuntque haec universalia ex eo tantum, quod una et eadem idea utamur, ad omnia individua quae inter se similia sunt cogitanda;* ut etiam unum et idem nomen omnibus rebus per ideam istam repraesentatis imponimus, quod nomen est universale. Ita cum videmus duos lapides, nec ad ipsorum naturam, sed ad hoc tantum quod duo sint attendimus, formamus ideam ejus numeri quem vocamus binarium . . . . . ». E veggansi, con divario del quale si dirà più avanti, G. FREGE [9]: « Ich definire demnach: *die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist der Umfang des Begriffes "gleichzahlig dem Begriffe F„* »; ed A. N. WHITEHEAD e B. RUSSELL [10]: « The Cardinal Number of a class

---

[8] *Principia philosophiae,* Amsterdam, 1650.

[9] *Die Grundlagen der Arithmetik,* Breslavia, 1884.

[10] *Principia mathematica II,* University Press, Cambridge, 1912.

α, which we will denote by "Nc ' α", is defined as *the class of all classes similar to* α ».)

Queste due concezioni del numero concreto e del numero astratto [11] (vedasi come ci servono anche le parole delle vecchie aritmetichette), intervengono insieme in ogni studio d' Aritmetica. Passiamo dall' una all' altra quando, in luogo di dire: « questo e quel numero sono eguali », diciamo che « sono lo stesso numero » (vedi G. Cantor, poche linee dopo quelle riportate or ora: « .... zwei Mengen M und N dann und nur dann *dieselbe Cardinalzahl* haben, wenn sie äquivalent sind »); e quando, invece di dire che si hanno fra i numeri « le unità », diciamo che si ha « la unità, 1 ». Si costruisce, colla concezione del numero astratto, la successione indefinita dei *numeri naturali* $1, 1+1, (1+1)+1, [(1+1)+1]+1, \ldots\ldots$ (vedi Euclide [12]: « .... ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος »); e ci foggiamo *i tipi delle classi finite*:

$$1,\quad (1, 2),\quad (1, 2, 3),\quad (1, 2, 3, 4), \ldots\ldots$$

***

Il processo descritto si riproduce negli svolgimenti del concetto di numero che la Geometria ha promossi o giustificati.

Le analogie che si riscontrano nelle teorie delle diverse specie di enti (segmenti rettilinei, angoli, angoli diedri, poligoni, poliedri etc.), che la Geometria fa oggetto di studio, ci fanno comprendere quelle specie sotto la comune denominazione di *grandezze*, e ci fanno fare di

---

11) Secondo B. Croce (op. cit. [6] parte I, sez. 1ª), quello di numero concreto è da dirsi [*pseudo-*]*concetto empirico* o *rappresentativo*, e quello di numero astratto è *concetto puro*.

12) l. cit. [5].

quelle teorie una sola teoria delle grandezze: due grandezze d'una qualunque delle specie accennate sono *equivalenti* o *non equivalenti*, v'è una grandezza *risultante* dall'aggiunta dell'una all'altra, etc..

E, riferendoci ad una qualunque specie S di grandezze, fra quelle cui si è accennato, fissata in essa una grandezza U non nulla, possiamo portare il nostro studio sulla classe C_1 delle grandezze multiple di U, o sulla classe (C) delle grandezze commensurabili con U, o infine sulla totalità C delle grandezze della specie. E se A è una qualunque grandezza — di C_1, o di (C), o di C —, quando nella considerazione di essa in confronto con U, facciamo astrazione dalla specie delle due grandezze e dai loro rapporti di posizione, intendiamo ancora che resti inerente alla grandezza A un carattere, e questo diciamo il *numero assoluto, concreto* — *intero* o *razionale* o *reale* —, che è rapporto di A ad U. (Vedi I. NEWTON [13]: « per numerum, non tam multitudinem unitatum, quam abstractam quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem, quae pro unitate habetur, rationem intelligimus. Estque triplex; integer, fractus, et surdus.... ».)

Definiremo ancora, in modo analogo a quello sopra accennato, le nozioni di eguaglianza, di diseguaglianza e di somma; e potremo anche definire il *prodotto*: se α e β sono i rapporti ad U delle grandezze A e B, diremo prodotto di α per β il numero che è rapporto ad U della grandezza che con A forma una coppia proporzionale a quella che è costituita da B e da U. (Vedi R. DESCARTES [14]: «.... en ayant une (ligne), que ie nommeray l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres et qui

---

[13] *Arithmetica universalis*, Cambridge, 1707.

[14] *Géométrie*, livre I.

peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatriesme, qui soit a l'une de ces deux comme l'autre est a l'unité, ce qui est le mesme que la Multiplication.... » ; vedi I. NEWTON [15]: «.... aptioris vocabuli defectu, multiplicatio etiam dici solet, quae fit per fractos aut surdos numeros, quaerendo novam quantitatem in ea quacumque ratione ad quantitatem multiplicandam, quam habet multiplicator ad unitatem » ; e vedi anche A. CAUCHY [16]: « Multiplier le nombre a par le nombre b c'est opérer sur le nombre a précisément comme on opère sur l'unité pour obtenir b » [17].)

Traducendo quindi in proposizioni relative a numeri le proposizioni esprimenti le proprietà essenziali delle grandezze e i caratteri essenziali delle relazioni che fra esse si considerano, troveremo ancora sostituibili i numeri eguali. E perciò ripartiremo in classi di grandezze equivalenti le grandezze della specie S cui ci riferiamo, e perverremo alla concezione del *numero reale astratto*, come nota comune a tutte le grandezze di una di quelle classi in rapporto a quella che comprende la grandezza U e le equivalenti.

Ci varrà come una tale concezione quell' immagine dell'aggregato dei numeri reali che ci procuriamo, quando ci riferiamo a segmenti, sostituendo ad ogni segmento che si abbia da considerare il segmento eguale a quello, appartenente ad una certa semiretta OM ed avente un estremo

---

[15] l. cit. [13].

[16] *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*, Parigi, 1821, I, nota 1.

[17] Questa definizione presa a sè è certo insufficiente (vedi G. PEANO, *Sul concetto di numero, I,* Riv. di Mat. I, 1891); non si deve vedervi di più che un'annotazione alle precedenti proposizioni di R. DESCARTES e I. NEWTON.

nell'origine O di questa. Così per ogni numero reale α si ha su OM un *punto-indice* P, comprendente con O un segmento del quale il rapporto ad U è eguale ad α; e numeri reali eguali hanno su OM lo stesso indice [18]. Quando poi ci riferiamo a specie di grandezze che non siano quella dei segmenti, potremo procurarci immagini analoghe.

*
* *

Ma qui è da notare che al numero intero che è rapporto ad U della grandezza A, di C_1, multipla di U secondo il numero m, si coordina questo numero naturale m, e che in particolare al numero, sia u, che è rapporto di U ad U, si coordina il numero 1; che al numero razionale che è rapporto ad U della grandezza A, di (C), multipla secondo m dell' n^{esima} parte di U, è coordinata la coppia di numeri naturali (m, n); e che infine al numero reale che è rapporto ad U della grandezza A, di C, individuata come quella che separa le classi contigue M ed N delle grandezze commensurabili con U o come quella che è limite superiore della classe M di grandezze commensurabili con U o in altro modo, è coordinata la coppia di classi (M, N) (*Schnitt*, *partizione* di R. DEDEKIND [19]), costituite dai numeri razionali che sono i rapporti ad U delle grandezze di M ed N, o è coordinata la classe M ([*Zahlen-*]*strecke* di M. PASCH [20], *segmento numerico* di M. CIPOLLA [21]) dei numeri razionali che sono i rapporti ad U delle grandezze di M; etc..

---

18) F. ENRIQUES (*I numeri reali* in *Questioni riguardanti le Matematiche elementari I*, edit. Zanichelli, Bologna, 1924 (3ª ediz.); § 39) vede in questa particolare determinazione del concetto astratto di numero reale una concezione del *numero reale ordinale*.

19) *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig, 1872.

20) *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung*, Lipsia, 1882.

21) *I numeri reali*, Per. di Mat. 3, 25, 1909.

Vi è dunque un' *aritmetizzazione*, per usare l' espressione di L. KRONECKER [22], della teoria dei numeri interi, dei razionali, dei reali; cioè si hanno tali riferimenti fra numeri interi o razionali o reali e classi di numeri naturali, che ogni proposizione intorno a quelli può ridursi ad una proposizione relativa a questi. Questa aritmetizzazione è già in EUCLIDE e regge tutta quella teoria delle proporzioni, che — aggiunta la proposizione della continuità, quando vogliamo riferirci a specie di grandezze diverse da quella dei segmenti — consente di dare la definizione di prodotto che sopra è ricordata.

Ora, a causa di tale aritmetizzazione, si ha *isomorfismo aritmetico* fra la classe dei numeri interi e quella dei numeri naturali (vedi M. CIPOLLA [23]: « due classi C e C' di grandezze numeriche sono *isomorfe*, se gli elementi di C e C' si corrispondono biunivocamente e reciprocamente e un'operazione fondamentale qualunque su dati elementi di C e l'operazione omonima sugli elementi corrispondenti di C' hanno risultati corrispondenti »); e noi confondiamo le due classi col dire che u è 1.

Inoltre, se negli accenni precedenti siamo partiti dalla considerazione di grandezze d' una specie S e vi si concepisce una classe Q di numeri reali quali caratteri delle diverse grandezze della specie in confronto con una grandezza U, non nulla, fissata ad arbitrio nella specie stessa, riferendoci ad altra specie S', nella quale si fissi una grandezza, non nulla, U' (o sostituendo, nella considerazione della specie S, alla grandezza U un'altra grandezza, non nulla, U'), avremo una classe Q' di numeri reali come caratteri delle grandezze della specie in confronto con U'.

---

[22] *Ueber den Zahlbegriff*, Journ. reine ang. Math. 101, 1887.
[23] l. cit. [21].

L'aritmetizzazione fa isomorfe alla classe dei numeri naturali le classi N ed N' dei numeri interi che sono comprese in Q e Q' risp.; queste classi N ed N' risultano quindi isomorfe fra di loro, e tale isomorfismo si subordina ad un isomorfismo fra le classi Q e Q', riflesso della corrispondenza proporzionale, fra le grandezze di S e quelle di S', nella quale si corrispondono le grandezze U e U'.

La nostra mente assurge quindi alla considerazione del gruppo di queste corrispondenze fra specie S, S', S'', S''',..... di grandezze; ed ascrivendo ad una classe Γ_1 le grandezze U, U', U'', U''',...., fissate una in ciascuna di quelle risp., ed in generale ad una classe Γ le grandezze A, A', A'', A''',....., di S, S', S'', S'''..... risp., corrispondentisi nelle corrispondenze proporzionali stesse, perviene ad una concezione del *numero reale* come nota inerente ad una classe Γ in confronto della classe Γ_1.

È dunque per fatto dell' aritmetizzazione che, qualunque sia la specie delle grandezze cui ci riferiamo, abbiamo sempre gli stessi numeri; e per essa l'immagine *di un* insieme di numeri reali, che ci procuravamo sopra colla semiretta OM etc., è l' immagine *dell'* insieme dei numeri reali: è la sola che ci occorra, è quella che ci serve in ogni caso [24].

---

[24] È da considerare la teoria dei numeri reali assoluti di C. BURALI-FORTI (*Logica matematica*, edit. Hoepli, Milano, 1919 (2ª ediz.); V, § 2), il quale subordina il concetto di numero ad un più generale concetto di *operatore*: i numeri reali assoluti sono operatori che trasformano le grandezze d' una qualunque specie S in grandezze della specie stessa; v' è un operatore che trasforma ogni grandezza in sè stessa, e, aritmetizzando la teoria, si pone tale operatore eguale a 1 (non ad 1_S).

*
* *

Lo svolgimento del concetto di numero, per il quale da *numeri assoluti* — interi o razionali o reali — passiamo ai *numeri relativi* o ai *numeri complessi a due unità* o ai *quaternioni*, è, nell' ordine di idee che seguiamo, svolgimento nei rispetti della comprensione.

Quando si ha da trattare di una classe C di *grandezze aventi verso* — cioè di una classe di grandezze, di una stessa specie, alla considerazione di ciascuna delle quali si associa quella dell' uno o dell' altro verso d' una retta —, si richiede che nel concetto di numero, insieme con la nota di q u a n t o un e l e m e n t o *A* d e l l a c l a s s e s i a p i ù o m e n o g r a n d e r i s p e t t o a d u n a l t r o e l e m e n t o *U* d e l l a c l a s s e s t e s s a, si ritenga anche la nota di q u a n t o e c o m e i l v e r s o d i *A* d i v e r g a d a q u e l l o d i *U*.

Le rette, delle quali i versi sono i versi delle grandezze di C, possono avere tutte una stessa direzione *d* o appartenere tutte a una stessa giacitura *g*; e corrispondentemente diremo che la classe C è una classe di *grandezze aventi verso e poste nella direzione d* o *nella giacitura g*; altrimenti diremo che si ha una classe di grandezze aventi verso e *poste nello spazio*. E nei tre casi il rapporto d'una grandezza *A* della classe ad un'altra, non nulla, *U* della classe stessa è risp. un numero relativo, o un numero complesso a due unità, o un quaternione.

E anche qui si ha un' aritmetizzazione, colla stessa funzione che si è osservata per numeri assoluti. Precisamente, ad ogni numero relativo si coordinano un numero reale assoluto (valore assoluto) ed uno fra due segni (+ e — secondo l'uso generale, ma, p. es., → e ←, secondo

Ch. Méray [25]); ad ogni numero complesso a due unità si coordinano un numero reale assoluto (modulo) e un numero reale relativo (argomento), e poi, distinti nella classe i numeri + 1 e *i* (le unità), si coordinano due numeri reali relativi (parte reale e coefficiente di *i*); ad ogni quaternione si coordinano un numero reale assoluto (modulo o tensore), un numero reale relativo (argomento o versore) e altri due numeri reali relativi che son le coordinate dell'asse del quaternione, e poi, distinti nella classe il quaternione + 1 e i quaternioni (versori-quadranti) *i*, *j* e *k*, si coordinano quattro numeri reali relativi (parte scalare e coefficienti di *i*, *j* e *k*).

Il concetto di numero assoluto, rapporto di grandezza assoluta a grandezza assoluta, ha tre gradi di estensione (numero intero, numero razionale, numero reale); e pur tre gradi di estensione (numero relativo, numero complesso a due unità, quaternione) ha il concetto di numero rapporto di grandezza avente verso a grandezza avente verso. E siccome è diversa, come abbiamo detto, la comprensione dei due concetti, non troviamo, in alcuna di queste ultime tre classi di numeri, compresa come sottoclasse quella dei numeri assoluti: vi troviamo solo una classe, quella dei numeri positivi, isomorfa a quella dei numeri assoluti. La classe dei numeri relativi è *superiore* a quella dei numeri assoluti [26].

---

[25] *Sur quelques perfectionnements dont serait susceptible l'exposition de la théorie des quantités négatives* (Nouv. Ann. de Math. 3, IX, 1890). — Tralasciamo qui di dire dello zero; se, trattando di numeri assoluti, ci si può restringere a trattare solo di numeri non nulli, lo zero non può essere escluso da alcuna considerazione riferentesi a numeri relativi.

[26] M. Cipolla, l. cit. [21].

***

La descrizione che precede, del processo mentale per il quale contiamo e misuriamo, è espressione di un modo di intendere comune; e di questo mi è sempre sembrato di avere una prova sperimentale sufficiente, quando ho accennato in lezione, in questo mio Liceo, a qualche tratto della descrizione stessa (con molta discrezione, ben si intende!); gli allievi mi hanno ascoltato, mi hanno compreso e hanno facilmente consentito: sì, veramente i numeri sono ciò che ella ci viene dicendo.

Ma ciò che più importa è che una tal descrizione segue le diverse fasi di quel processo, e perciò vi si conciliano vedute, antiche e recenti, che autori hanno opposto ad autori.

E per dire ancora della struttura dell'Aritmetica, osserviamo che, formandosi, nel modo indicato, le teorie dei numeri razionali, dei reali, dei relativi etc., in ciascuna troviamo a fondamento due gruppi di proposizioni: quelle nelle quali si traducono le proposizioni esprimenti gli attributi essenziali delle grandezze e i caratteri delle relazioni che fra queste si considerano (p. es. le proposizioni: « se a, b e c sono numeri, è $(a+b)+c=a+(b+c)$ », « è $a+b=b+a$ »), e quelle che vengono coll'aritmetizzazione (p. es., per numeri razionali, le proposizioni: « è $\frac{m}{n}=\frac{mq}{nq}$ », « $\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}$ »).

L'assieme delle proposizioni dei due gruppi è, per ciascuna teoria, fondamento sovrabbondante, in quanto alcune delle proposizioni stesse dànno come conseguenza le altre. Quindi lo studio della purezza logica induce a scegliere per ciascun caso, fra quelle proposizioni, le necessarie e sufficienti a derivarne tutta la teoria.

Si hanno così, in luogo delle *teorie sintetiche* che finora abbiamo avute in vista, le *teorie analitiche*, nelle quali non è affermato il concetto di numero, muovendo dalla considerazione di classi di grandezze: presupposto il possesso della teoria dei numeri naturali, si tramutano in definizioni del numero razionale, o reale, o relativo etc., le proposizioni colle quali, nell'aritmetizzazione, è affermato il coordinarsi ad un numero razionale, o reale, o relativo etc., d'una certa classe di numeri naturali: si dà cioè a tal classe il nome di numero razionale, o reale, o relativo etc..

E queste teorie analitiche, prodotto degli studi critici recenti, possono avere una loro particolare snellezza. Ma con esse l'Aritmetica perde, naturalmente, quell'unità di struttura che si ha colle teorie sintetiche; nè si ha più da parlare di concetto di numero, di estensioni di tal concetto. Si hanno classi numeriche e si ha solo da ricercare se fra esse si abbia isomorfismo, se una sia superiore o inferiore rispetto ad un'altra. E, sempre restando, p. es., la classe dei numeri relativi superiore a quella dei numeri assoluti, anche, p. es., la classe dei *numeri reali* assoluti, definiti come *partizioni* fatte nella totalità dei numeri razionali o come *segmenti numerici* costituiti da numeri razionali, viene ad essere superiore a quella dei numeri razionali, perchè comprende in sè, come sottoclasse, la classe delle *partizioni razionali* o dei *segmenti numerici razionali* (si intende che cosa vogliamo in tal guisa brevemente significare), e tal classe è isomorfa a quella dei *numeri razionali.*

È da osservare in qual senso si siano sviluppate le esigenze degli autori di teorie analitiche. P. es. numero

razionale è dapprima, con CH. MÉRAY [27] e con G. PEANO [28], « ogni ente x della forma $x = (\times b)/a$, ove a e b sono numeri naturali, cioè l'operazione di moltiplicare per b e poi dividere per a » ; e con J. TANNERY [29] era semplicemente « un ensemble de deux nombres entiers, rangés dans un ordre déterminé ». Ma con A. PADOA [30] il numero razionale diventa « l'insieme di tutte le coppie proporzionali » ad una coppia (a, b).

Le due fasi, che si possono anche osservare per le teorie analitiche dei numeri relativi, corrispondono a quelle di cui si è detto, della concezione del numero concreto e dell' astratto: la definizione — nominale, cioè vera e propria definizione — del numero razionale, data da A. PADOA, fa esatto riscontro alle definizioni del numero cardinale di G. FREGE e di A. N. WHITEHEAD e B. RUSSELL.

Ma si nota, per un verso, che a fianco di queste hanno ancora un contenuto che interessa i passi riportati sopra di EUCLIDE, di N. TARTAGLIA, di R. DESCARTES e degli altri; e, per altro verso, che taluni autori di teorie analitiche sentono il bisogno di aggiungere alle loro definizioni parole come di commento, che le definizioni stesse non richiederebbero. Con una definizione si impone un nome: qui si dà nome di numero razionale, o relativo,

---

27) *Théorie élèmentaire des fractions*, etc. (Nouv. Ann. de Math., 3, VIII, 1889).

28) *Arithmetices principia nova methodo exposita*, edit. Bocca, Torino, 1889; § 8. *Aritmetica generale e Algebra elem.*, edit. Paravia, Torino, 1902; § 26.

29) *Introduction à la théorie des fonctions d' une variable*, edit. Hermann, Parigi, 1886; prefaz..

30) *Introduzione alla teoria delle frazioni*, Boll. d. Mathesis I, 1909; p. 66.

*

ad una coppia di numeri naturali o ad una classe di coppie etc.; e non ci sarebbe altro da dire.

Invece A. PADOA aggiunge in nota [31]: «... *sostanzialmente*, la frazione $\frac{a}{b}$ si presenta quale *astrazione* della coppia (a, b) rispetto alla relazione egualiforme "è proporzionale a" »; ma poi, in altro luogo, per spiegare che cosa significhi « astrazione di (a, b) » rispetto alla detta relazione, ripete soltanto che significa l'insieme di tutte e sole quelle coppie che sono proporzionali ad (a, b). Similmente M. CIPOLLA [32] dice: « La classe delle coppie proporzionali ad (a, b), *cioè l'astratto di* (a, b) rispetto alla relazione di proporzionalità, si chiama il numero razionale o la frazione corrispondente ad (a, b) ». E già R. DEDEKIND, che pur si teneva d'aver trattato la « Erscheinung des Schnittes in ihrer logischen Reinheit [33] », introducendo i numeri irrazionali aveva ritenuto di dovere scrivere [34]: « ... so *erschaffen wir* eine neue, eine irrationale Zahl α... », come G. PEANO [35] ha rilevato.

Ora il creare, l'astrarre è far qualche cosa; e questi accenni ad un' a t t i v i t à della nostra mente significano che le definizioni pure e semplici non appagano; sono segni quasi di indecisione nella scelta d'un assetto dell'Aritmetica.

---

31) l. cit. [30], p. 74. La *definizione generale* di *astrazione*, cui sopra si accenna, trovasi nello scritto *Dell'astrazione matematica*, in *Questioni filosofiche* (edit. Formiggini, Modena, 1908).

32) *Analisi algebrica*, edit. Capozzi, Palermo, 1921 (2ª ediz.); §§ 23, 32, 34.

33) *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, 1887; prefaz..

34) l. cit. [19]; p. 14.

35) *Sui fondamenti dell' Analisi*, Boll. d. Mathesis, II, 1910; p. 36.

Per determinare fra quali specie di assetto verta questa scelta, mi riferisco ancora alla descrizione che sopra è data.

*
* *

Si hanno un gruppo A di proposizioni intorno alle classi finite ed un gruppo A_1 di proposizioni intorno alle grandezze (assolute o aventi verso); ciascun gruppo comprende assiomi e relativi corollari.

Le due teorie dànno luogo al concetto di numero (naturale, o reale assoluto, relativo etc.); questo concetto, come ogni concetto, non si definisce: si afferma, e se ne affermano le caratteristiche, gli attributi. Si può dire, se si crede, che in tal guisa se ne dà una *definizione mediante postulati.*

E si hanno così un gruppo B di proposizioni fondamentali, primitive, per i numeri naturali ed un gruppo B_1 di proposizioni fondamentali per i numeri reali assoluti o relativi etc.. In queste proposizioni traduciamo, riferendoci a numeri, quelle fra le proposizioni dei gruppi A ed A_1 risp., che ci porgono, per le deduzioni che si hanno in vista, un fondamento sufficiente e rispondente alle esigenze, estetiche o didattiche, delle quali abbiamo da preoccuparci.

Vi è infine il gruppo C_1 delle proposizioni aritmetizzanti la teoria dei numeri reali assoluti, relativi, etc..

Stando alla tradizione, tutto questo svolgimento è Aritmetica. E in sostanza restano fedeli alla tradizione, e perciò abbiamo sopra potuto citarli, G. Frege ed A. N. Whitehead e B. Russell; senonchè questi autori identificano la classe di classi finite equivalenti con la nota numerale che le è inerente: (il che, come osserva

G. PEANO [36], è affermare un'eguaglianza del genere delle seguenti: bianchezza = le cose bianche; malattia = i malati, etc.). E così dànno *forma* di definizione nominale all'affermazione del concetto di numero.

Invece *gli assiomatici*, G. PEANO [37] e con lui A. PADOA [38] e M. PIERI [39], e D. HILBERT [40], escludono dalla Aritmetica i gruppi di proposizioni A ed A_1, come pertinenti quello alla Logica e questo alla Geometria. E i primi, per trattare dei numeri naturali, muovono dal gruppo B, assumendolo come definizione per postulati dei concetti di numero, di successivo d'un numero; e D. HILBERT, per trattare dei numeri reali relativi (« Wir denken ein System von Dingen; wir nennen diese Dinge Zahlen... »), muove dalle proposizioni del gruppo B_1, cioè dall'insieme dei suoi assiomi delle funzioni elementari (der Verknüpfung), del calcolo, dell'ordinamento e della continuità.

Dunque l'indirizzo tradizionale e l'assiomatico discordano solo sulla posizione dei confini, affatto convezionali, fra Aritmetica e Logica e Geometria. E non si deve pensare che nell'indirizzo assiomatico non si sconti l'economia che esso fa in confronto di quello tradizionale: in quell'indirizzo si deve provare la compatibilità degli assiomi — proposizioni dei gruppi B e B_1 —, dai quali muoviamo, e ciò si ottiene trovando un'interpretazione

---

36) *Le definizioni per astrazione*, Boll. d. Mathesis, VII, 1915; p. 118.

37) l. cit. 28).

38) *Thèorie des nombres entiers absolus*, Rev. math., VIII, 1902-6.

39) *Sopra gli assiomi aritmetici*, Boll. Acc. Gioenia, 2, II, 1908.

40) *Ueber den Zahlbegriff*, Jahresb. d. deut. Math.-Vereinigung, VIII, 1900.

logica degli assiomi stessi nelle proposizioni dei gruppi A ed A_1 [41].

Quanto alle teorie analitiche, gli autori di esse sono liberi di scegliere, fra le proposizioni del gruppo C_1, quelle che convenga di tramutare in definizioni, di numero razionale, reale, relativo etc., di eguaglianza, di somma di numeri siffatti. Ma carattere proprio di queste teorie è di essere formali, di riferirsi cioè a classi di numeri naturali o razionali o reali etc., come classi di simboli dei quali non è da ricercare il significato.

*
* *

Nel periodo di tempo, al quale abbiamo in principio detto di riferirci, è stata perfezionata la teoria dei numeri reali, nei rispetti della sua aritmetizzazione, in modo da soddisfare a tutti i bisogni dell'Analisi matematica. Dopo questo, la novità più degna di nota fra quante la moderna critica ne ha recate, è, a mio avviso, quella, riferentesi al gruppo di proposizioni B, che ha origine nelle opere di H. GRASSMANN [42] e di R. DEDEKIND [43] ed ha trovato espressione definitiva da parte di G. PEANO e della sua scuola [44].

L'Aritmetica tradizionale afferma:

Si hanno numeri; se a e b sono numeri è $a >$, o $=$, o $< b$; insieme con i numeri a e b si ha la loro somma $a+b$; è $a+b>a$, e, se $a_1 > a$, a_1 è somma di a e d'un altro numero b; è $(a+b)+c=a+(b+c)$, $a+b = b+a$.

---

41) V. M. PIERI, *Sur la compatibilité des axiomes de l'Arithmétique,* Rev. de Métaphysique et Morale, 1906.

42) *Lehrbuch der Arithmetik,* Berlino, 1861.

43) l. cit. 33).

44) l. cit. 28), 38), 39).

Ed aggiunge: Si ha tra i numeri l'unità, 1; e i numeri sono 1 e le somme $1+1$, $(1+1)+1$,..., le quali si designano con 2, 3, ... (Continua: i prodotti d'un numero qualunque a, per i diversi numeri, sono a e le somme $a+a$, $(a+a)+a$,...., di 2, 3,.... addendi eguali ad a; le potenze dello stesso a, con i diversi numeri per esponenti, sono a e i prodotti aa, $(aa)a$,...., di 2, 3,..... fattori eguali ad a.)

Non si distacca da questo modo D. HILBERT [45], quando, col motto: « Am Anfang ist das Zeichen », dice: Il segno 1 è un numero; un segno che comincia con 1 e finisce con 1 e così fatto che fra 1 e 1 si ha sempre +, è pure un numero; questi segni: 1, $1+1$, $1+1+1$,.... sono numeri e i numeri non sono altra cosa che essi: essi sono oggetto delle nostre considerazioni e non hanno altrimenti significato.

In questo non si ha che una determinazione particolare del concetto di numero cardinale astratto, simile ad altra già osservata. Il numero è nota inerente ad una classe di collezioni equivalenti, e D. HILBERT si fa una immagine dell'aggregato dei numeri, scegliendo in ogni classe di collezioni equivalenti una collezione modello: questi modelli sono precisamente le collezioni di, insignificanti, bastoncini: I, II, III,....

Invece con G. PEANO ci limitiano alle proposizioni:

1 è un numero; ad ogni numero è successivo uno ed un sol numero; 1 non è successivo d'altro numero; una classe, cui appartenga 1 e, con un numero qualunque, appartenga pure il suo successivo, comprende ogni numero.

---

[45] *Neubegründung der Mathematik I*, Abhand. math. Seminar d. Hamb. Universität, I, 1922.

Questa teoria è detta da taluni ordinale; ma non è da confondere con quella del numero ordinale. Al concetto di numero ordinale (vedi F. ENRIQUES [46]) si perviene dalla considerazione di collezioni ordinate. Stabilita, mediante riferimento degli elementi d'una collezione ordinata A a quelli d'un'altra collezione ordinata A', la nozione di *eguaglianza di posto* per elementi a e a' di A ed A' risp., si classificano gli elementi di tutte le collezioni che si abbiano da considerare, ponendo in una stessa classe gli elementi di egual posto; e la nota che rimane inerente ad una qualunque classe siffatta, quando si faccia astrazione dalla specie degli oggetti delle collezioni cui ci riferiamo, dal loro collocamento e dal tempo nel quale sono dati, si dice *numero ordinale,* astratto.

Perciò, per evitare equivoci, io direi *induttiva*, non ordinale, la teoria di G. PEANO. E ciò che la distingue dalla teoria tradizionale è questo: mentre l' Aritmetica tradizionale, partendo dalla considerazione delle classi finite (e consentendosi quindi la visione di qualsiasi collezione di bastoncini), concepisce i numeri come tipi di quelle classi, e tratta i loro segni come indici dei tipi stessi, l' Aritmetica induttiva restringe la sua considerazione al comporsi di classe con elemento (e non si consente altra visione che quella del bastoncino e dell'atto di aggiungere un bastoncino).

Con altra immagine, dove l' Aritmetica tradizionale dice: Vado a fare una passeggiata, l'Aritmetica induttiva dice: Metto avanti un piede; (qui riprende un momento il respiro, e poi continua:) dopo aver messo avanti un piede, metto avanti quell' altro. E così, portandosi ad esaminare più da vicino il meccanismo della deambula-

---

[46] l. cit. [18], § 10.

zione, vede qualche cosa di meno di quello che è una passeggiata. Non riesce a dire: Di qui al tal luogo, ci sono 500 passi; ma dice soltanto: Ponetevi su questa via e, un passo dopo l'altro, arriverete. Rinunzia quindi a dire che il prodotto di 5 per 8 è la somma di 8 addendi eguali a 5; (vedi R. FRISONE [47], che non riesce a dire che 500 è 100 + 100 + 100 + 100 + 100).

G. PEANO [48] dice che ogni definizione come questa, ora ricordata, del prodotto « è una frase sonora, ma che non può dare l'idea a chi non l'abbia prima ». Ma l'idea è appunto data prima, dall'Aritmetica tradizionale; e si può domandare se, chi non abbia idea di quello che è una passeggiata, possa avere idea del fare un passo e del far seguire passo a passo. Si potrebbe pensare a questa prova: se ci rivolgiamo al primo che incontriamo per la strada e gli diciamo che moltiplicare 5 per 8 è far la somma di 8 numeri eguali a 5, egli molto probabilmente comprende; è molto meno probabile che comprenda la definizione del prodotto per induzione. E tal prova dovrebbe togliere [49] « ragione a dubitare che sia più semplice l' idea di *numero* » — come l' Aritmetica induttiva la porge, se davvero la porge —, « piuttostochè quella di *moltitudine composta* » — cioè quella di ἀριθμός, ἐκ μονάδων συγχείμενον πλῆθος, di EUCLIDE e di D. HILBERT.

Il principio di induzione rimane ad assicurarci della sufficienza delle dimostrazioni che appunto si dicono per induzione. F. MAUROLICO [50], che lo scoprì, aveva ragione

---

[47] *Le varie definizioni di prodotto,* Atti Acc. Scienze di Torino, LIII, 1918.

[48] *Le definizioni in Matematica,* Per. di Mat., 4, I, 1921; p. 184.

[49] G. PEANO, l. cit. [6].

[50] *Opuscula mathematica* (1557), Venezia, 1575; (*Arithmeticorum libri duo, 1;* 13, 15, 65, 66, 67).

di procedere passo passo, perchè le questioni che trattava offrivano, anche a causa d'un ristretto uso di simboli, delle difficoltà.

*
* *

La conclusione delle mie riflessioni viene ad esser questa : l'Aritmetica non è da fare e nemmeno è stata fatta di recente; essa è da gran tempo. Quello che c'è da fare è insegnarla, quale è, senza artifici, senza reticenze, *con senso storico*: smarrire questo senso è ritrarsi in disparte. È invece necessario che l'Aritmetica e gli altri rami delle Matematiche sieno insegnati; e non tanto per i fini pratici ai quali possono servire o per il diletto che possono arrecare, quanto perchè valgono ad educare i giovani al parlare sincero e sobrio e all'onesto ed austero pensare.

Pavia, Aprile 1927.

DUILIO GIGLI.